CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Chapter 1 Vector

Web Site

- http://cpe.rsu.ac.th/ut
  - Download Material, Course Notes
  - Download Slides
  - Download HW Solutions
  - Grading
  - Announcements
  - Resources

Today Topics

- Period 1
  - Course Outlines
  - Course Web Site
  - Part I Chapter 1 Vector (Review)
  - Breaks
  - Part I Chapter 1 Vector (Review)
- Assignment:
  - ยังไม่มีการบ้าน
  - **Download MATLAB Tutorial 1-5 และลองทำ Exercise ดู**
- Next Week ต่อ Vector และ Chapter 2 เรื่อง Matrix

CPE 332

Computer Engineering Mathematic II

PART I: Linear Algebra

(Chapter 1-3)

CPE 332 T1-57 Wk1

CHAPTER I

VECTORS

Definition of Vector

1.1 Vectors: นิยามและคำจำกัดความ

Vector เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาด(Magnitude) และทิศทาง Direction ผิดกับ Scalar ที่มีแต่ขนาดอย่างเดียว ดังนั้นการบวก-ลบ และการคูณ(Product) ของ Vector จะต่างจาก Scalar มองอีกมุมมองหนึ่งเสมือนกับว่า Vector มีมากกว่า 1 มิติ ในขณะที่ Scalar มีแค่มิติเดียว

การแสดง Vector แสดงได้ด้วยเส้นที่มีลูกศรกำหนดทิศทางใน Space ที่มีมากกว่า 1 มิติ

Notation: $\mathbf{F} = \overline{OP}, \overrightarrow{OP}$

Magnitude: $|\mathbf{F}| = F = \left|\overrightarrow{OP}\right| = OP$

ถ้าเราให้ $\hat{\mathbf{f}}$ เป็น Vector ที่มีขนาดเท่ากับหนึ่ง และมีทิศทางเดียวกันกับ $\mathbf{F}$ เราเรียก $\hat{\mathbf{f}}$ ว่าเป็น Unit Vector ของ $\mathbf{F}$ ดังนั้นเราสามารถเขียน Vector ได้ในรูปของ Magnitude ของมันคูณกับ Unit Vector

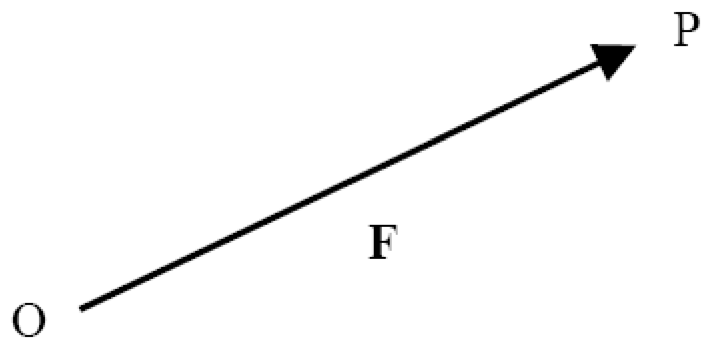
Unit Vector: $\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\hat{\mathbf{f}} = F\hat{\mathbf{f}}$

Vector จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาด และทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ Vector มีขนาดเท่ากัน และขนานกัน

ถ้าให้ $\mathbf{F}$ เป็น Vector เราจะได้ $-\mathbf{F}$ เป็น Vector ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม

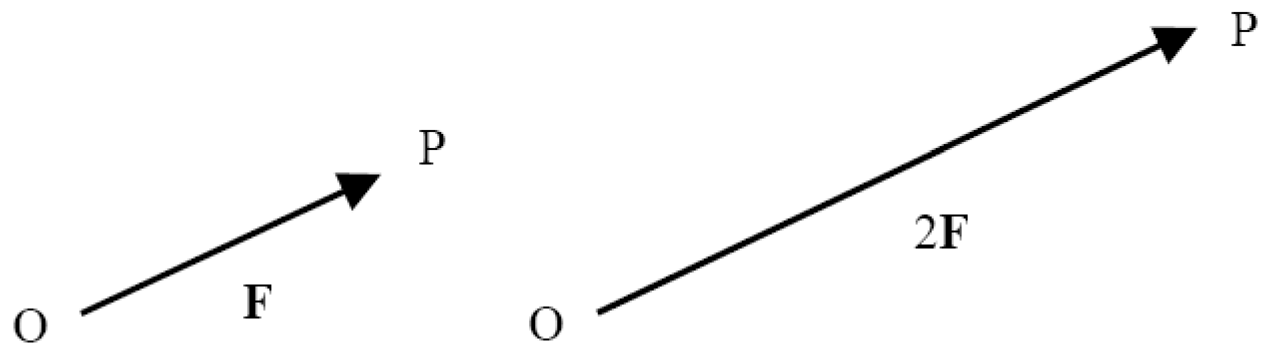
Definition of Vector

สำหรับการแสดงด้วยรูปภาพ เราจะแสดงทั้งขนาดและทิศทางด้วยเส้นที่มีลูกศร โดยขนาดแสดงด้วยความยาวของเส้น และทิศทางตามลูกศรนั้น



รูปที่ 1.1 แสดง Vector

เมื่อเราคูณ Vector ด้วยค่าของ Scalar หมายถึงเราคูณความยาวของมัน หรือคูณ Magnitude ของมันด้วยค่า Scalar นั้น ในกรณีนี้ ทิศทางของ Vector ไม่เปลี่ยนแปลง



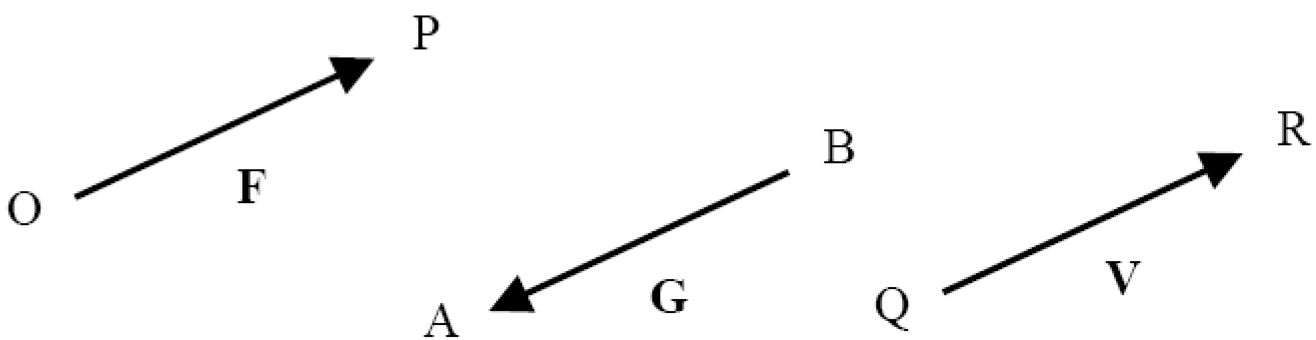
รูปที่ 1.2 แสดงการคูณ Vector ด้วย Scalar

ถ้าเราให้ $\hat{\mathbf{f}}$ เป็น Vector ที่มีขนาด (Magnitude) เท่ากับ “หนึ่ง” และมีทิศทางเดียวกันกับ $\mathbf{F}$ เราเรียก $\hat{\mathbf{f}}$ ว่าเป็น Unit Vector ของ $\mathbf{F}$ ดังนั้นเราสามารถเขียน Vector ได้ในรูปของ Magnitude ของมันคูณกับ Unit Vector

Unit Vector: $\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\hat{\mathbf{f}} = F\hat{\mathbf{f}}$

Vector จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาด และทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ Vector มีขนาดเท่ากัน และขนานกัน

ถ้าให้ $\mathbf{F}$ เป็น Vector เราจะได้ $-\mathbf{F}$ เป็น Vector ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม จากรูป เราได้ $\mathbf{F} = \mathbf{V} = -\mathbf{G}$ หรือ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{BA}$



รูปที่ 1.3 แสดง Vector ที่เท่ากัน

Notes

- เนื่องจาก Vector มีทั้งขนาดและทิศทาง เราสามารถเขียน Vector เป็นสองส่วน
  - ส่วนขนาดแทนที่ด้วย Scalar
  - ส่วนทิศทาง จะแทนที่ด้วย Unit Vector ที่มีทิศทางเดียวกับ Vector เดิม

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{F} = \left|\mathbf{F}\right| \hat{\mathbf{f}} = F\,\hat{\mathbf{f}} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = F(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

- การกำหนดทิศทาง อาจจะกำหนดเป็น Component ในแกน Coordinate (x,y,z); อาจจะกำหนดเป็นมุมที่กระทำกับแกน Coordinate
- อาจจะกำหนดเป็น Ratio ที่กระทำกับแกนก็ได้
- จะกล่าวต่อไปภายหลัง
  - เราจะเน้นที่สองอันแรก คือกำหนดเป็น Component i,j,k ในแกน x,y,z
  - หรือกำหนดในรูป Cosine ของมุม
  - ทั้งสองอันนี้จะเกี่ยวข้องกับ Unit Vector

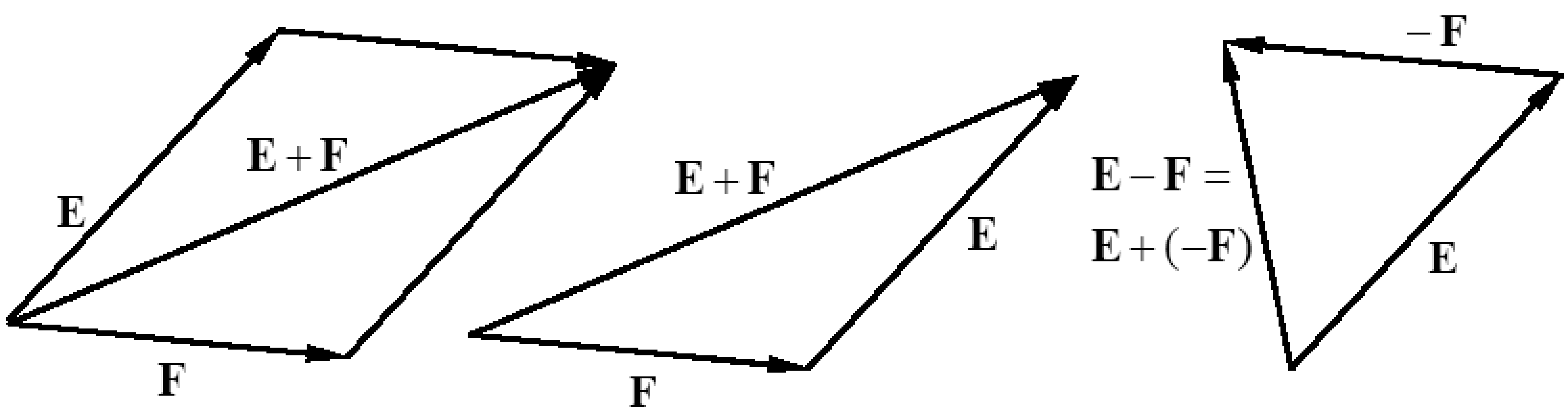
Vector Operations

- เนื่องจาก Vector ประกอบด้วยทั้งขนาดและทิศทาง
  - พีชคณิต เช่น บวก ลบ คูณ หาร จะไม่เหมือนกับ Scalar เนื่องจากต้องนำทิศทางมาประกอบการคำนวณด้วย
  - การ บวก-ลบ ของ Vector จะได้ Vector ใหม่ที่ขนาดและทิศทางต่างจากเดิม
  - การคูณ เราจะไม่ใช้คำว่า ‘Multiplication’ แต่จะใช้คำว่า ‘Product’ แบ่งเป็นสองประเภท
    - Scalar Product (Dot Product; ●) จะได้ Scalar
    - Vector Product (Cross Product; X) จะได้ Vector ที่ตั้งฉากกับ Vector เดิมทั้งสอง

Addition and Substraction

1.2 การบวกและลบของ Vector: Triangle Law of Addition

การบวกกันของ Vector สามารถกระทำได้โดยใช้ Parallelogram law of addition (รูปแรกข้างล่าง) นอกจากนี้เรายังสามารถใช้ Triangle Law of Addition (รูปกลางข้างล่าง) สังเกตว่า การบวกจะเป็น Commutative กล่าวคือ $\mathbf{E}+\mathbf{F}=\mathbf{F}+\mathbf{E}$ ส่วนการลบกันกระทำโดย $\mathbf{E}-\mathbf{F}=\mathbf{E}+(-\mathbf{F})$ (รูปขวา ข้างล่าง)

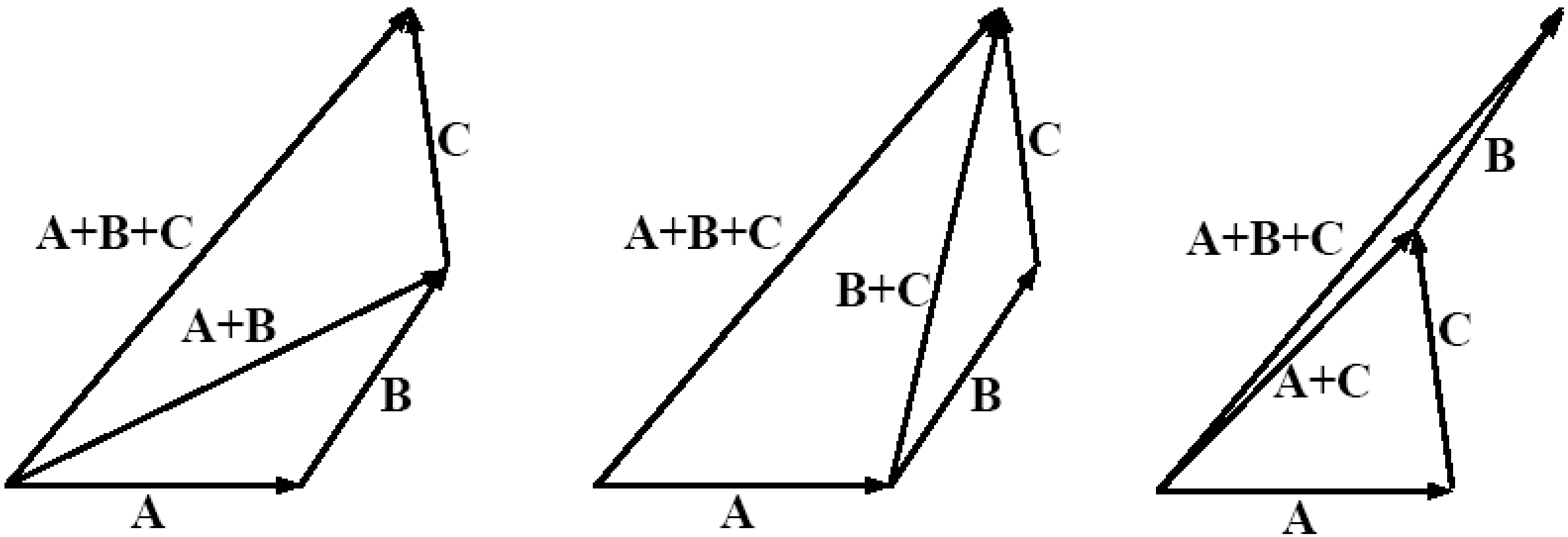


รูปที่ 1.4 แสดงการบวกและลบของ Vector

นอกจากนี้แล้วการบวก-ลบกันยังเป็น Associative ด้วย กล่าวคือ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ และเมื่อรวมกับ Commutative Law จะเท่ากับ $(\mathbf{A}+\mathbf{C})+\mathbf{B}$

เราสามารถบวก Vector มากกว่าสองตัว ซึ่งจากหลักการที่กล่าวข้างต้น เราสามารถทำได้โดยการบวกทีละสองตัวไหนก่อนก็ได้ ผลลัพธ์จะได้เหมือนกัน รูปข้างล่างแสดงการบวก Vector $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ โดยแสดงวิธีทำ 3 วิธี ตามลำดับจากซ้ายไปขวาคือ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ และ $(\mathbf{A}+\mathbf{C})+\mathbf{B}$

ถ้าให้ α และ β เป็น Scalar เราจะได้ $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ และ $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ นอกจากนี้แล้วการบวกและลบ Vector ยังเป็นไปตามกฎของ Algebra ทั่วๆไป และเราสามารถแก้สมการ Linear ของ Vector โดยใช้วิธีการเดียวกันกับการแก้สมการ Linear Algebra

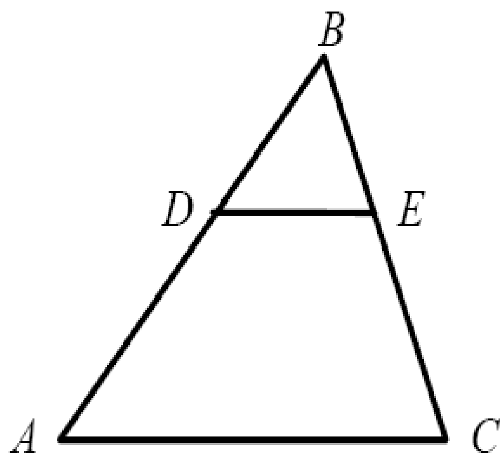


รูปที่ 1.5 แสดงการบวกของ Vector สามตัว

ในการลบ Vector ที่เท่ากัน เราจะได้ Null Vector หรือ Zero Vector ซึ่งเป็น Vector ที่มีขนาดเป็น 0 และไม่มีทิศทาง

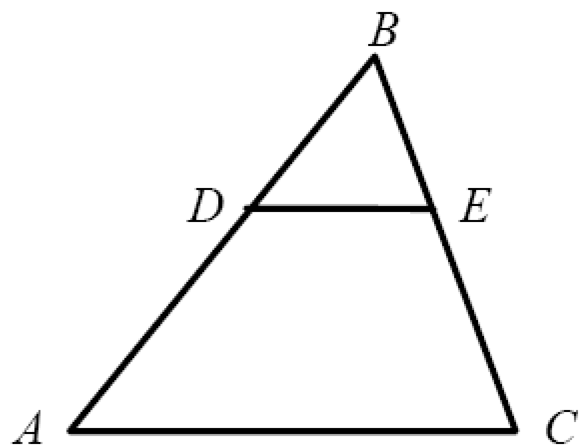
การประยุกต์ใช้ใน Plane Geometry

Example 1.1 จากสามเหลี่ยม ABC และ DBE ดังรูปที่ 1.6 ข้างล่าง ถ้ากำหนดให้ $DB = (2/5)AB$, และ $BE = (2/5)BC$ จงพิสูจน์ว่า $DE // AC$ และ $DE = (2/5)AC$ กล่าวคือ ABC และ DBE เป็นสามเหลี่ยมเสมือน (Similar Triangle)



รูปที่ 1.6 สามเหลี่ยมสำหรับคำถามตัวอย่างที่ 1.1

Example 1.1 จากสามเหลี่ยม ABC และ DBE ดังรูปที่ 1.6 ข้างล่าง ถ้ากำหนดให้ $DB=(2/5)AB$, และ $BE=(2/5)BC$ จงพิสูจน์ว่า $DE\,//\,AC$ และ $DE=(2/5)AC$ กล่าวคือ ABC และ DBE เป็นสามเหลี่ยมเสมือน (Similar Triangle)



รูปที่ 1.6 สามเหลี่ยมสำหรับคำถามตัวอย่างที่ 1.1

คำตอบ เราแสดงแต่ละด้านของสามเหลี่ยมโดยใช้ Vector ซึ่งโจทย์กำหนด $\overrightarrow{DB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ ซึ่งการจะแสดงว่า $DE\,//\,AC$ และ $DE=(2/5)AC$ จะเท่ากับแสดงว่า $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ นั่นเอง

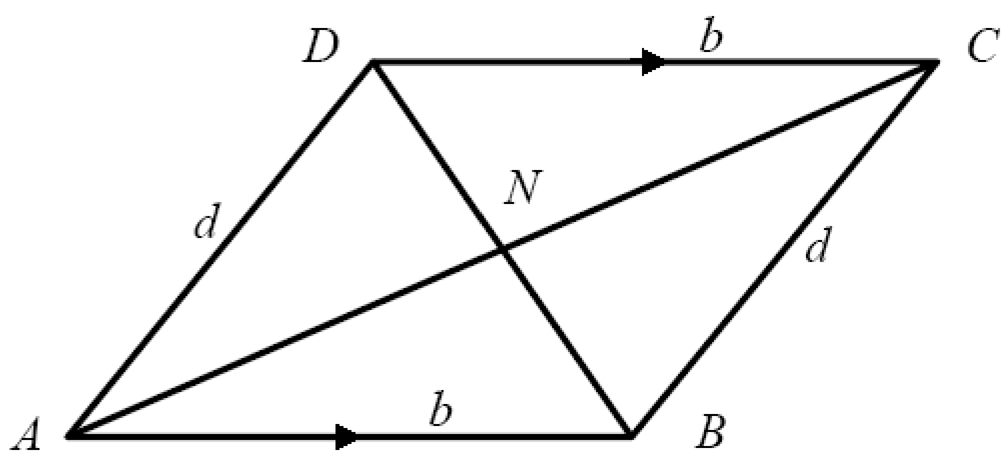
จาก Vector เราได้ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ และจากสามเหลี่ยรูปเล็ก $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}$

ดังนั้นจาก

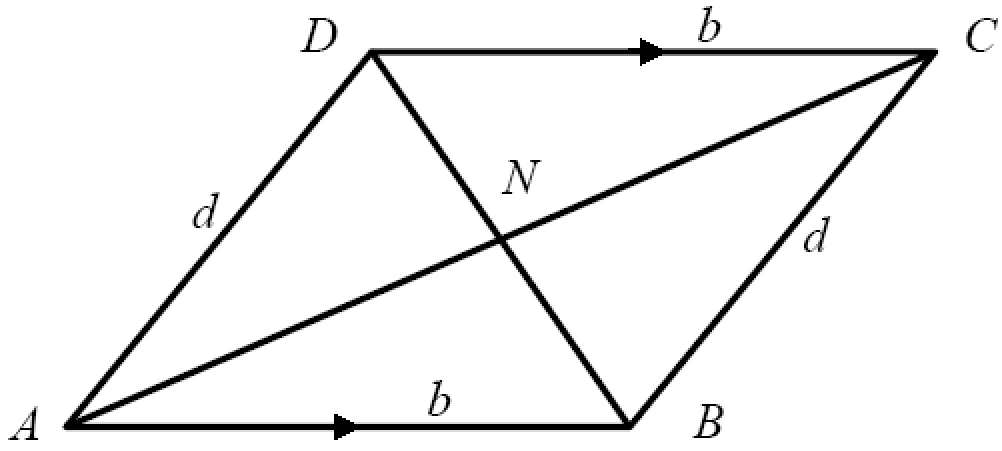
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\tfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\tfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\tfrac{2}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\tfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

Example 1.2 จากสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Parallelogram) จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

คำตอบ พิจารณา Parallelogram ดังรูปที่ 1.7 ข้างล่าง ซึ่งเราจะเขียนแต่ละด้านในรูป Vector



รูปที่ 1.7 Parallelogram



รูปที่ 1.7 Parallelogram

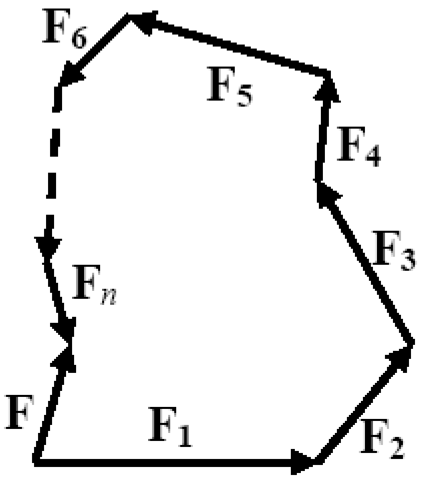
ให้ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ และ $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$ เราต้องการจะแสดงให้เห็นว่า $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

จากรูป เราได้ $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ และ $\overrightarrow{BD} = \mathbf{d} - \mathbf{b}$ นอกจากนี้ $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$ โดยที่ α และ β เป็นค่า Constant ดังนั้นเราสามารถเขียน

$\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BD} = \alpha(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{d} - \alpha\,\mathbf{b}$ และ $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC} = \beta(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \beta\mathbf{b} + \beta\mathbf{d}$

จาก $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$ เราได้ $\mathbf{b} + \alpha\,\mathbf{d} - \alpha\,\mathbf{b} = \beta\,\mathbf{b} + \beta\,\mathbf{d}$ เมื่อจับคู่ที่เหมือนกัน เราได้ $\alpha = \beta$ และ $1 - \alpha = \beta$ เมื่อแก้สมการ เราจะได้ $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Component Vector

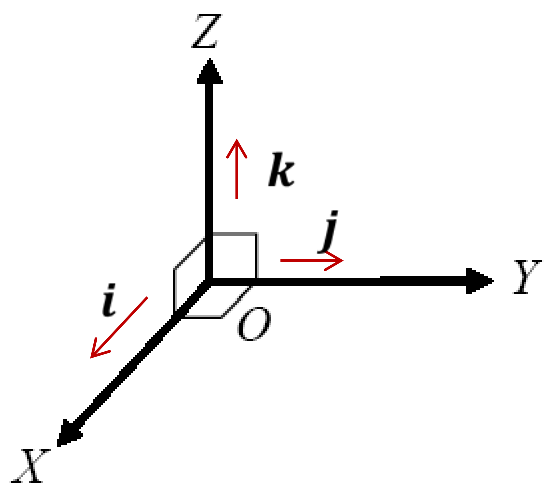


รูปที่ 1.11 Component Vectors ของ F

Component Vector in Cartesian Coordinate

1.4 Vector in Cartesian Coordinate

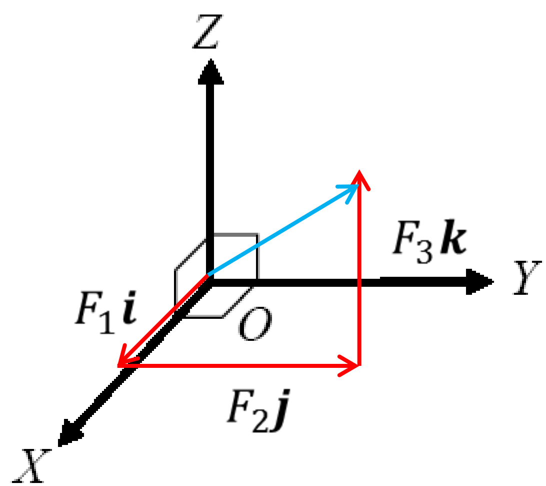
ในกรณีของ Vector ใน $\mathbf{R}^3$ กล่าวคือใน 3-Dimension เราใช้ Right-Handed System ในการเขียน Coordinate ของแกน x, y, z กล่าวคือเป็นลักษณะตามเข็มนาฬิกา โดยที่แต่ละแกนมี Unit Vector เป็น $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$



รูปที่ 1.12 Cartesian Coordinate

Component Vector in Cartesian Coordinate

- พิจารณา Vector F ใน R^3 หรือ 3 มิติ ประกอบด้วย F_1,F_2,F_3 เราสามารถเขียน
  - $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j}+F_3\boldsymbol{k}$

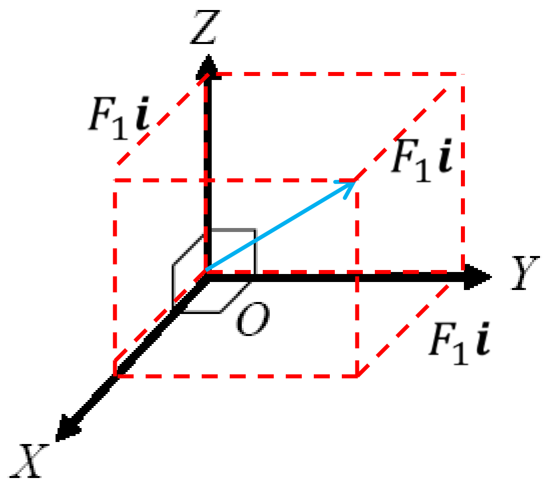


รูปที่ 1.12 Cartesian Coordinate

Component Vector in Cartesian Coordinate

– $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$

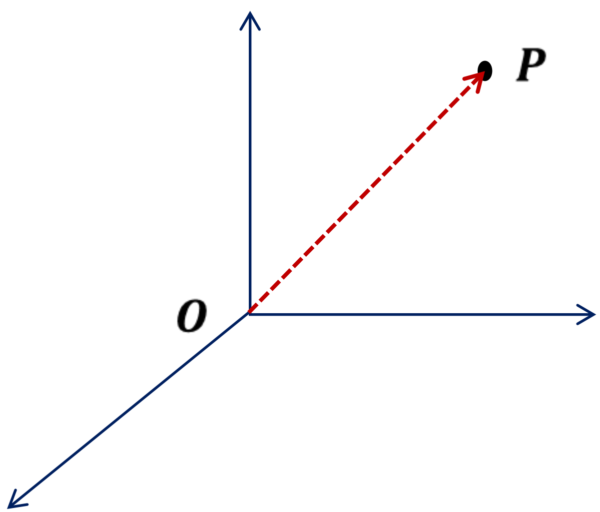
- **กล่าวคือ F มีส่วนประกอบบนสามแกน**
- **มาตรฐานการเขียน Component Vector**



รูปที่ 1.12 Cartesian Coordinate

Position Vector

- จุดใน Space สามารถแสดงได้โดยใช้ Vector เริ่มจาก Origin
  - อาจเรียก Location Vector หรือ Radius Vector
  - จุด P แสดงได้โดยใช้ Vector OP
  - และสามารถแสดงได้โดยใช้ Component Vector



Position Vector และ Addition-Subtraction using Component Vector

$$\mathbf{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k\,, \mathbf{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1) i + (A_2 \pm B_2) j + (A_3 \pm B_3)$$

สังเกตว่า A_n, B_n เป็นค่า Scalar กล่าวคือเป็น Magnitude ของ Component สำหรับแต่ละแกน โดยที่จุด Origin ของ Coordinate อยู่ที่จุดเริ่มต้นของ Vector ในกรณีนี้เราเรียก Vector ที่เริ่มจากจุดตั้งต้น(หรืออ้างอิงจาก Origin) ว่าเป็น Position Vector

Position Vector: $\mathbf{r}$ = position vector of $\mathbf{P}(x, y, z)$ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ถ้า $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ เราได้

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\mathbf{i} + (A_2 \pm B_2)\mathbf{j} + (A_3 \pm B_3)\mathbf{k}$$

Distance Between

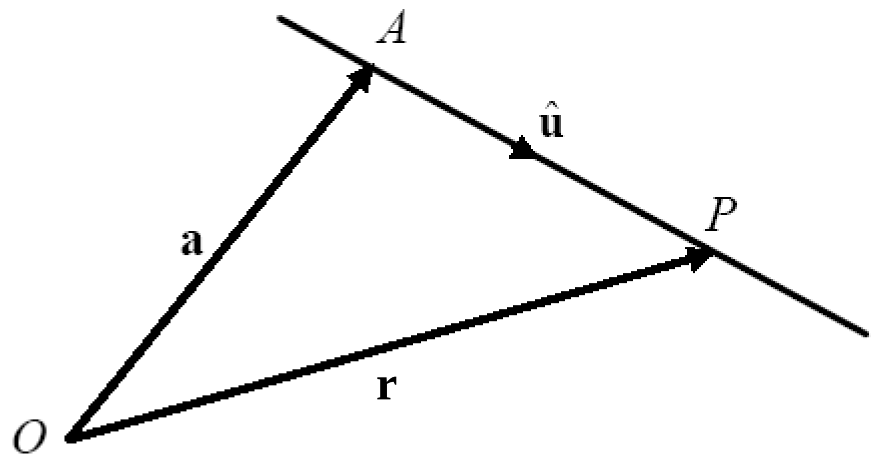
$$\mathbf{P}_1(x_1, y_1, z_1), \mathbf{P}_2(x_2, y_2, z_2), d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

สรุป

- การเขียน Vector ในลักษณะ Component จะสามารถบวกและลบกันได้ง่าย โดยการบวกลบแต่ละ Component บนแกนเดียวกัน
  - Vector Product สามารถคำนวณได้เช่นกัน
- จุดใน Space สามารถแทนด้วย Vector เริ่มจากจุด Origin เรียก Position Vector
  - Vector ที่เกิดจากสองจุดใน Space สามารถคำนวณได้จาก Position Vector นี้

Example 1.3 การหาสมการเส้นตรง เมื่อกำหนดจุดบนเส้นตรงและทิศทางของเส้นตรงนั้น

คำตอบ พิจารณาจากรูปที่ 1.8 สมมุติว่าจุด O เป็น Origin และจุด A เป็นจุดบนเส้นตรงที่ต้องการ โดยให้ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ทิศทางของเส้นตรงถูกกำหนดโดย Unit Vector $\hat{\mathbf{u}}$ เราสามารถหาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

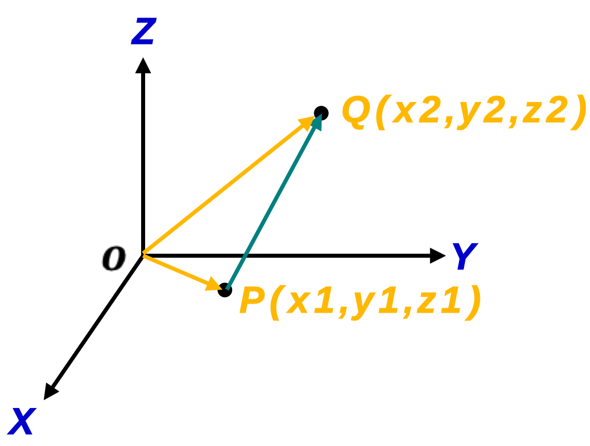


รูปที่ 1.8 สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดจุดและทิศทาง

กำหนดจุด P ที่จะวิ่งไปตามเส้นตรง เกิด Vector $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ซึ่งจะเปลี่ยนไปเมื่อ P เปลี่ยนตำแหน่ง และจะเท่ากับ $\mathbf{a}$ ถ้า P มาอยู่ที่จุด A ดังนั้นถ้าให้ t เป็นค่า Scalar มีค่าเท่ากับขนาด $\overrightarrow{AP}$ เราได้ $\overrightarrow{AP} = t\hat{\mathbf{u}}$ และจาก $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ เราได้ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\hat{\mathbf{u}}$ และเป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง t และ $\mathbf{r}$

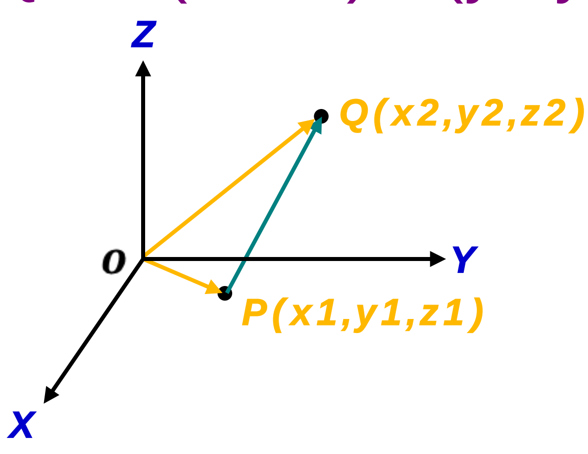
Any vectors in Cartesian Coordinates

- Given 2 Points, P(x1,y1,z1) and Q(x2,y2,z2)
  - We have $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$
  - Then $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$
    - $\overrightarrow{PQ} = x2\mathbf{i}+y2\mathbf{j}+z2\mathbf{k} - x1\mathbf{i}+y1\mathbf{j}+z1\mathbf{k}$
    - $\overrightarrow{PQ} =(x2-x1)\mathbf{i}+(y2-y1)\mathbf{j}+(z2-z1)\mathbf{k}$



Any vectors in Cartesian Coordinates

- Given 2 Points, P(x1,y1,z1) and Q(x2,y2,z2)
  - PQ =(x2-x1)**i**+(y2-y1)**j**+(z2-z1)**k**
  - Also magnitude or length of vector is the distance between those 2 points (Euclidian Distance)
    - $PQ = \sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2+(z2-z1)^2}$



Direction Cosine/Ratio

- Vector สามารถเขียนเป็นสองส่วนประกอบ

$$\mathbf{A} = \left|\mathbf{A}\right|\hat{\mathbf{a}}$$

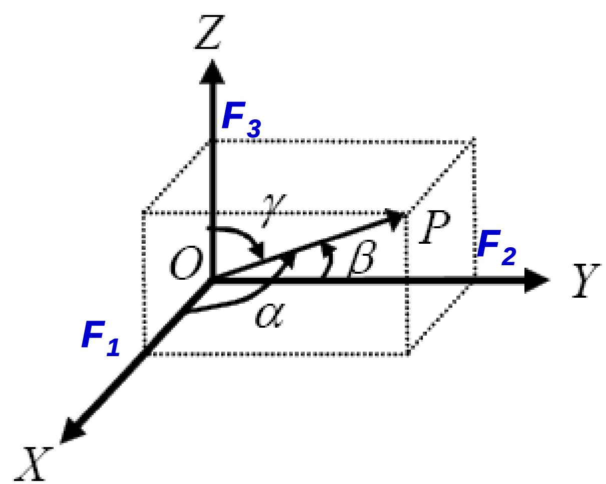
  – ขนาด สามารถหาได้ง่าย กรณี Position Vector
  – ทิศทาง คือ Unit Vector ที่มีทิศทางเดียวกันกับ Vector นั้น
    - ทิศทาง สามารถแตกเป็น Component Vector บนแต่ละแกนได้ด้วย
    - ทิศทางสามารถกำหนดด้วยมุมที่ทำกับแต่ละแกนได้ด้วย
    - ทั้งสองแบบนี้ สัมพันธ์กันทางตรีโกณมิติ โดยการกำหนดด้วยค่า Cosine ของมุม เรียก Direction Cosine

Direction Cosine

- Position vector OP
  - Magnitude equal to OP = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
  - Direction: $\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}$
    - **Called Direction Cosine**

$$\mathbf{F}=\overrightarrow{OP}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}=OP\cos\alpha\mathbf{i}+OP\cos\beta\mathbf{j}+OP\cos\gamma\mathbf{k}=OP(\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k})$$

We have
$\cos\alpha=F_1/OP$
$\cos\beta=F_2/OP$
$\cos\gamma=F_3/OP$



Direction Cosine and Direction Ratio

สมมุติ Vector $\mathbf{F} = \overrightarrow{OP} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ทิศทางของ Vector สามารถกำหนดได้จาก Direction ของทั้งสาม Component ในแกน x, y, และ z นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดได้จากมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ กระทำกับ OX, OY, OZ สมมุติว่าเป็นมุม α, β, γ ตามลำดับ ดังนั้นจาก

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{OP} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = OP\cos\alpha\mathbf{i} + OP\cos\beta\mathbf{j} + OP\cos\gamma\mathbf{k} = OP(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k})$$

ค่า $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ เรียก Direction Cosine ของ Vector $\mathbf{F}$ สังเกตว่า $\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$ จะต้องเป็น Unit Vector ดังนั้นเราได้ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ นอกจากนั้นแล้ว $\cos\alpha = F_1 / F$, $\cos\beta = F_2 / F$, และ $\cos\gamma = F_3 / F$

Direction Cosine and Direction Ratio

บางครั้งเราต้องการเขียนให้อยู่ในรูปอัตราส่วนของจำนวนเต็มมากกว่ารูป Cosine ในกรณีนี้เราเขียนในรูปของตัวแปร l, m, n สามตัวที่ทำให้

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma}$$

ค่านี้เราเรียก Direction Ratio ในความเป็นจริงแล้ว $[F_1, F_2, F_3]$ ที่จริงก็คือ Direction Ratio ของ $\mathbf{F}$

Example

- Given points $P_1(2,-4,5)$ and $P_2(1,3,-2)$, find the vector P_1P_2 and its magnitude and direction
  - $OP_1 = 2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ and $OP_2 = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$
  - $P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = -\mathbf{i}+7\mathbf{j}-7\mathbf{k}$
  - $P_1P_2 = \sqrt{1+49+49} = \sqrt{99}$
  - $\cos\alpha = -1/\sqrt{99}$ then $\alpha = 95.8$ degree
  - $\cos\beta = 7/\sqrt{99}$ then $\beta = 45.3$ degree
  - $\cos\gamma = -7/\sqrt{99}$ then $\gamma = 134.7$ degree

Direction Cosine and Direction Ratio

การเปลี่ยน Direction Ratio เป็น Direction Cosine ทำได้โดยให้

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma} = \lambda$$

ดังนั้น $\cos\alpha = l/\lambda, \cos\beta = m/\lambda, \cos\lambda = n/\lambda$ แต่เนื่องจาก $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ เราได้

$l^2 + m^2 + n^2 = \lambda^2$ และ Direction Cosine จะเป็น

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

EX. จงหามุมที่กระทำกับ Coordinate สำหรับเส้นที่ลากจากจุด $P(1,1,1)$ และ $Q(3,-2,4)$

Next Week

- Vector Product
  - – Scalar Product(Dot)
  - – Vector Product(Cross)
- Chapter II: MATRICES
- HW II

CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Week 2

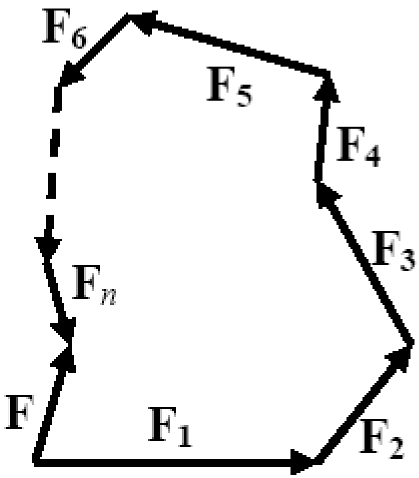
Chapter 1 Vector (cont.)

Chapter 2 Matrix

Today Topics

- Chapter 1 Cont.
- Break
- Chapter 2: Matrix
- Download Homework 1: Chapter 1
  - Due Next Week

Component Vector

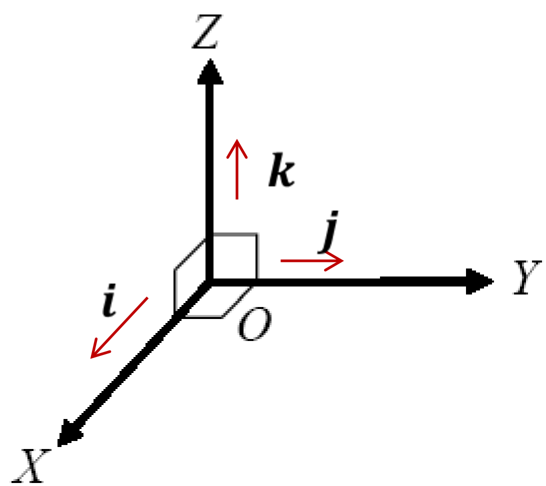


รูปที่ 1.11 Component Vectors ของ F

Component Vector in Cartesian Coordinate

1.4 Vector in Cartesian Coordinate

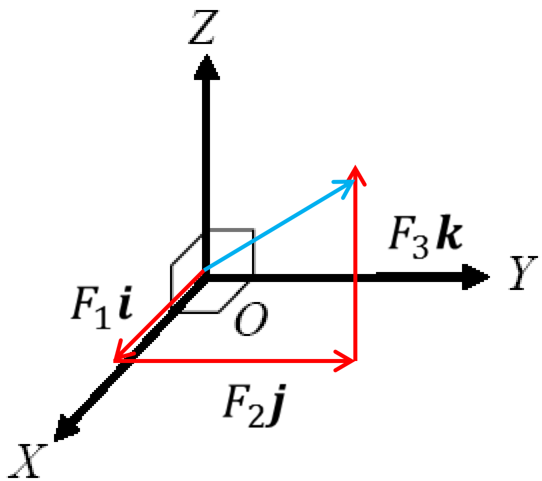
ในกรณีของ Vector ใน $\mathbf{R}^3$ กล่าวคือใน 3-Dimension เราใช้ Right-Handed System ในการเขียน Coordinate ของแกน x, y, z กล่าวคือเป็นลักษณะตามเข็มนาฬิกา โดยที่แต่ละแกนมี Unit Vector เป็น $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$



รูปที่ 1.12 Cartesian Coordinate

Component Vector in Cartesian Coordinate

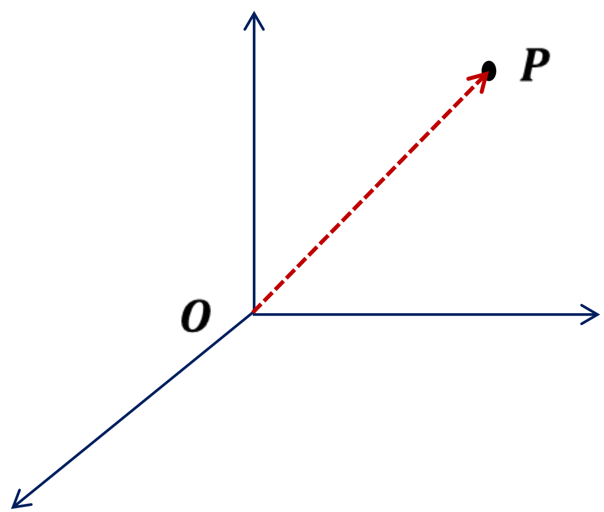
- พิจารณา Vector F ใน R^3 หรือ 3 มิติ ประกอบด้วย F_1, F_2, F_3 เราสามารถเขียน
  - $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$



รูปที่ 1.12 Cartesian Coordinate

Position Vector

- จุดใน Space สามารถแสดงได้โดยใช้ Vector เริ่มจาก Origin
  - อาจเรียก Location Vector หรือ Radius Vector
  - จุด P แสดงได้โดยใช้ Vector OP
  - และสามารถแสดงได้โดยใช้ Component Vector



Position Vector และ Addition-Subtraction using Component Vector

$$\mathbf{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k\,, \mathbf{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1) i + (A_2 \pm B_2) j + (A_3 \pm B_3)$$

สังเกตว่า A_n, B_n เป็นค่า Scalar กล่าวคือเป็น Magnitude ของ Component สำหรับแต่ละแกน โดยที่จุด Origin ของ Coordinate อยู่ที่จุดเริ่มต้นของ Vector ในกรณีนี้เราเรียก Vector ที่เริ่มจากจุดตั้งต้น(หรืออ้างอิงจาก Origin) ว่าเป็น Position Vector

Position Vector: $\mathbf{r}$ = position vector of $\mathbf{P}(x, y, z)$ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,\ |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ถ้า $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ เราได้

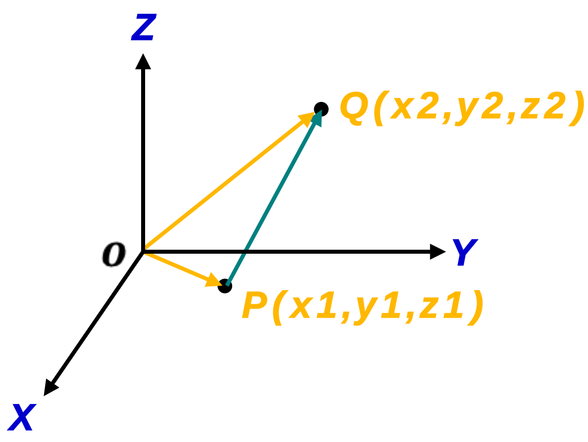
$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_1 \pm B_1)\mathbf{i} + (A_2 \pm B_2)\mathbf{j} + (A_3 \pm B_3)\mathbf{k}$$

Distance Between

$$\mathbf{P}_1(x_1, y_1, z_1), \mathbf{P}_2(x_2, y_2, z_2), d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Any vectors in Cartesian Coordinates

- Given 2 Points, P(x1,y1,z1) and Q(x2,y2,z2)
  - PQ =(x2-x1)**i**+(y2-y1)**j**+(z2-z1)**k**
  - Also magnitude or length of vector is the distance between those 2 points (Euclidian Distance)
    - PQ = $\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2+(z2-z1)^2}$



Direction Cosine/Ratio

- Vector สามารถเขียนเป็นสองส่วนประกอบ

$$\mathbf{A} = \left|\mathbf{A}\right|\hat{\mathbf{a}}$$

  – ขนาด สามารถหาได้ง่าย กรณี Position Vector
  – ทิศทาง คือ Unit Vector ที่มีทิศทางเดียวกันกับ Vector นั้น
    - ทิศทาง สามารถแตกเป็น Component Vector บนแต่ละแกนได้ด้วย
    - ทิศทางสามารถกำหนดด้วยมุมที่ทำกับแต่ละแกนได้ด้วย
    - ทั้งสองแบบนี้ สัมพันธ์กันทางตรีโกณมิติ โดยการกำหนดด้วยค่า Cosine ของมุม เรียก Direction Cosine

Direction Cosine

- Position vector OP
  - Magnitude equal to OP = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
  - Direction: $\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}$
    - **Called Direction Cosine**

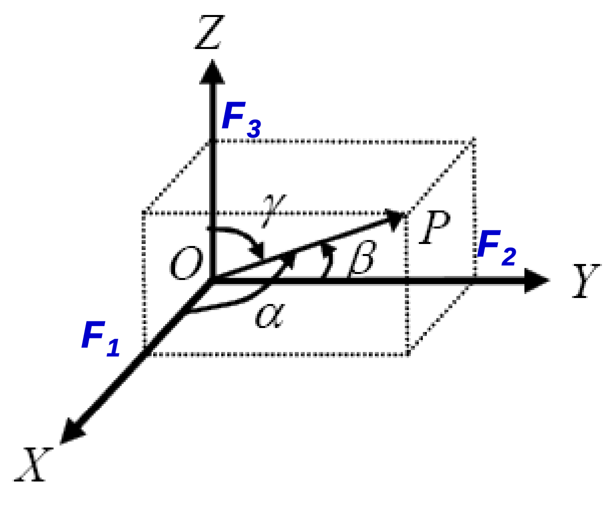
$$\mathbf{F} = \overrightarrow{OP} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = OP\cos\alpha\mathbf{i} + OP\cos\beta\mathbf{j} + OP\cos\gamma\mathbf{k} = OP(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k})$$

We have

$\cos\alpha = F_1/OP$

$\cos\beta = F_2/OP$

$\cos\gamma = F_3/OP$



Products of Vectors

- Vector Product
  - – Scalar Product(DOT)
  - – Vector Product(Cross)

Scalar Product(DOT)

Scalar Product: $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB\cos\theta$, จะเป็น Scalar Quantity จะเป็น Commutative $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$

Scalar Product (DOT)

คุณสมบัติ

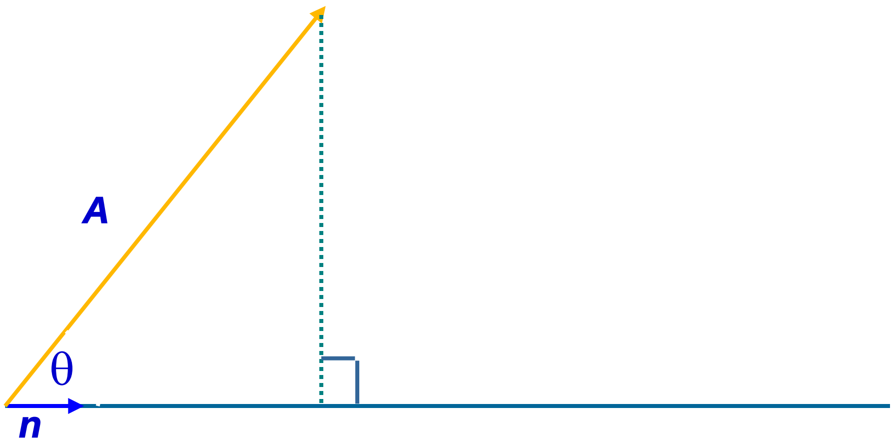
1. ถ้าสอง Vector ตั้งฉากกัน, Perpendicular: $\theta = 90^o$, $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$
2. ถ้าสอง Vector ขนานกัน, $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB$, กรณีพิเศษ $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = |\mathbf{A}|^2 = A^2$ = Sq. Magnitude
3. $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A(B\cos\theta) = (A\cos\theta)B = A$ คูณ Component ของ $\mathbf{B}$ ในทิศทางของ $\mathbf{A} = B$ คูณ Component ของ $\mathbf{A}$ ในทิศทางของ $\mathbf{B}$ และถ้าให้ $\mathbf{n}$ เป็น Unit Vector ในทิศทางหนึ่ง เราจะได้ $\mathbf{A} \bullet \mathbf{n} = A\cos\theta$ เป็น Component ของ $\mathbf{A}$ ในทิศทางนั้น
4. $\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$
5. $\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{0}$ และ $\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{1}$ ดังนั้นถ้า

   $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ เราได้

   $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
6. $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$

Ex. จงหามุมระหว่างสอง Vector $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{B} = \mathbf{2i} + \mathbf{j} + \mathbf{2k}$

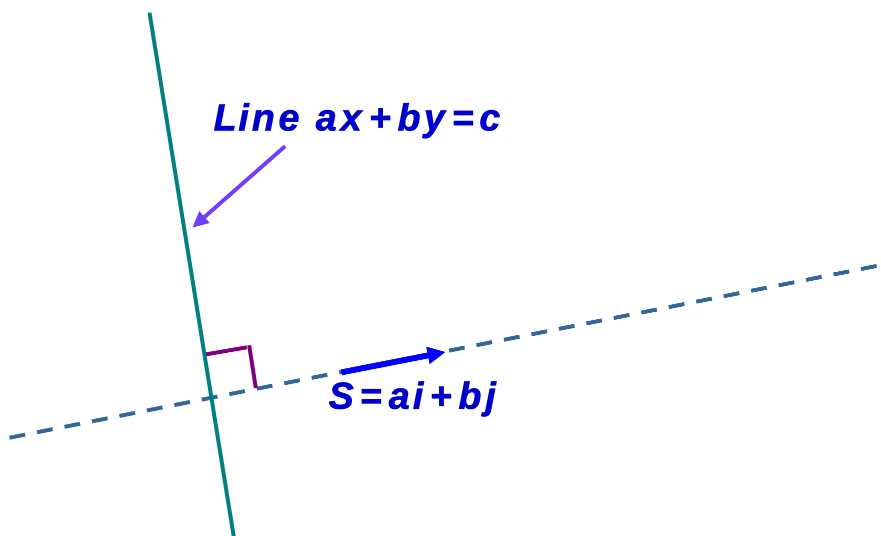
Scalar(Dot) Product



$\mathbf{A} \bullet \mathbf{n} = A\cos\theta$

Scalar(Dot) Product

- **A•(B+C)=A•B+A•C**
- Let **A** = a_1**i**+a_2**j**+a_3**k**, **B** = b_1**i**+b_2**j**+b_3**k**
  - We have **A•B =** $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- Also $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$
- Given **S**=a**i**+b**j**, the equation of line perpendicular to this vector is in the form
  - **ax+by=c**



DOT Product

Geometric Application:

1. พิสูจน์ Pythagorus's Theorem $c^2 = a^2 + b^2$
2. พิสูจน์ Cosine Rule $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
3. หาสมการเส้นตรงจาก $P(x, y)$ ตั้งฉากกับเส้นที่กำหนด $s = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ และผ่านจุด $A'(x', y')$ เราได้สมการ $ax + by = c = ax' + by'$
4. มุมระหว่างสองเส้นที่ตัดกัน
5. ระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ไปยังเส้นที่กำหนด $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = c$
6. สมการของ Plane โดยกำหนด Normal Direction **a** และ Plane ผ่านจุด $B(\overrightarrow{OB} = \mathbf{b})$ ถ้าให้ P เป็นจุดใดๆบน Plane และ $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ เราได้ BP อยู่บน Plane และตั้งฉากกับ **a** เราได้ $(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \bullet \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ดังนั้น

   ถ้า $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ เราสามารถหาสมการของ Plane ได้เป็น $a_1x + a_2y + a_3z = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = c$ ซึ่งมี Coefficient เท่ากับ Component ใน **a**

Example

- Find the angle between the vector
  - $\mathbf{A}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ and $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$
- We calculate $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = 1.2-1.1-1.2=-1$
- Also $A = \sqrt{(1+1+1)}=\sqrt{3}$
- Also $B = \sqrt{(4+1+4)}=3$
- Then $\cos\theta = -1/3\sqrt{3}$
  - $\theta = 101.1$ degrees

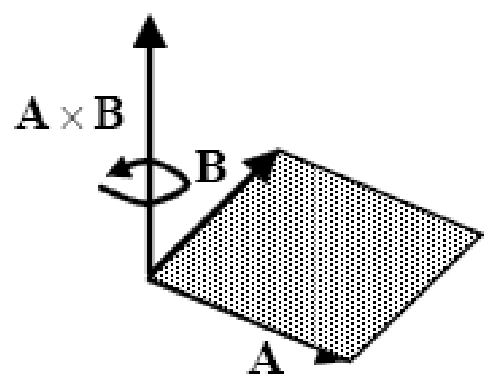
Vector Product (Cross)

Vector Product: $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$,

(i) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ จะตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$,

(ii) Magnitude: $\left|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right| = AB\sin\theta$,

(iii) มุมที่กระทำ และทิศทางของ Vector ที่ได้จะเป็นไปตาม Right Hand Rotation



Cross Product

คุณสมบัติของ Vector Product:

1. ถ้า $\hat{\mathbf{n}}$ เป็น unit vector ในทิศทาง $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ เราได้ $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$ และ $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = AB\sin\theta(-\hat{\mathbf{n}})$ ดังนั้นเราสรุปว่า $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$
2. ถ้าทั้งสอง Vector ขนานกัน $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = 0$ ถ้า Vector แต่ละตัวไม่เท่ากับศูนย์
3. ถ้าทั้งสอง Vector ตั้งฉากกัน $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\,\hat{\mathbf{n}}$
4. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0, \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},\ldots$
5. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$
6. $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ ดังนั้น

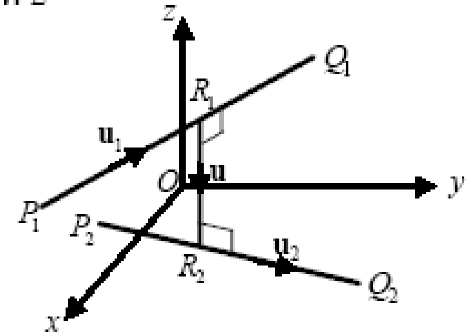
   $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$ เขียนอีกอย่างได้

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{vmatrix}$$

7. จาก Magnitude $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$ ซึ่งก็คือพื้นที่ของ Parallelogram ที่มีด้านประกอบด้วย สอง Vector ดังกล่าว

Example 1.17 กำหนดเส้นตรง 2 เส้นในระนาบที่แตกต่างกัน หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสอง (หาความยาวของเส้นที่ลากตั้งฉากกับเส้นตรงทั้งสอง)

คำตอบ จากรูป 1.23 กำหนดเส้นตรงทั้งสองผ่านจุด P_1Q_1 และ P_2Q_2 และเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงทั้งสองผ่านจุด R_1 บนเส้นตรงเส้นแรก และผ่านจุด R_2 บนเส้นตรงเส้นที่ 2



รูปที่ 1.23 ระยะห่างระหว่างสองเส้น

ให้ Unit Vector บนเส้น P_1Q_1, P_2Q_2 และ R_1R_2 เป็น $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, และ $\mathbf{u}$ ตามลำดับ และให้ Position Vector ของ P_1 และ P_2 เป็น $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ ตามลำดับ ดังนั้นเราได้

$$\overrightarrow{OR_1} = \mathbf{r}_1 + P_1R_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{r}_2 + P_2R_2\mathbf{u}_2 - R_1R_2\mathbf{u}$$

ทำ Scalar Product กับ $\mathbf{u}$ ทั้งสมการ เราได้

$$\mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{u} + P_1R_1\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{r}_2 \bullet \mathbf{u} + P_2R_2\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u} - R_1R_2\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$$

แต่ $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 1$, และ $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u} = 0$ ดังนั้น เมื่อเรียงสมการใหม่ จะได้

$$R_1R_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{u}$$

เนื่องจาก $\mathbf{u}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{u}_1$ และ $\mathbf{u}_2$ ดังนั้นมันจะต้องอยู่ในทิศทางของ $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ ดังนั้นเราได้

$$R_1R_2 = \left| \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|} \right|$$

3 Vector Products

- $(\mathbf{B} \bullet \mathbf{C})\mathbf{A} = k\mathbf{A}$

- $\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ เท่ากับปริมาตร Parallelepiped และสามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ เรียก Vector Triple Product เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C}$

Examples

- Let $A=2i+3j-k$, $B=i+j+2k$
  - $A \bullet B = 2+3-2 = 3$
  - $A \times B = (6+1)i-(4+1)j+(2-3)k=7i-5j-k$
  - $A \times B$ is orthogonal to both A and B
    - Test : $A \bullet (A \times B) = (2i+3j-k) \bullet (7i-5j-k) = 14-15+1=0$
    - Test : $B \bullet (A \times B) = (i+j+2k) \bullet (7i-5j-k) = 7-5-2=0$

Plane Equation in 3D

- ใน 2D สมการเส้นตรงจะมี general Form
  - Ax+By=C
- ใน 3D สมการของ Plane จะมี General Form
  - Ax+By+Cz=D
  - D เป็นค่าคงที่ ทุกๆสมการในรูปเดียวกัน แต่ค่า D ต่างกัน จะเป็นระนาบที่ขนานกัน
    - 3x-2y+5z = 3 จะขนานกับ 3x-2y+5z = 6

Example 1

- กำหนดสมการของ Plane 2x+3y+2z=5 จงหา unit vector ที่ตั้งฉากกับ Plane นี้
  - กำหนด 3 จุด คือ A, B, C ดังนี้
  - A: x=0,y=0,ดังนั้น z=5/2 → A(0,0,2.5)
  - B: x=1,y=0, ดังนั้น z=(5-2)/2 → B(1,0,1.5)
  - C: x=0,y=1, ดังนั้น z=(5-3)/2 → C(0,1,1)
  - Vector $\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$ จะได้ Vector ที่ตั้งฉากกับ Plane

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{4.25}}\left[\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} + \mathbf{k}\right]$$

- สังเกตุว่าทุกๆ Vector ที่เป็น multiple ของ 2i+3j+2k จะตั้งฉากกับ Plane 2x+3y+2z=k เสมอ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

Example 2

- จงหาสมการของ Plane ที่ตั้งฉากกับ Vector 3i-2j-k และกำหนดให้จุด (1,1,2) อยู่บน Plane นั้น
  - จากตัวอย่างก่อน เราได้สมการของ Plane เป็น 3x-2y-z= k
  - เราหาค่า k โดยแทนค่าจุด (1,1,2) ลงในสมการดังนี้ 3(1)-2(1)-(2)=-1=k
  - ดังนั้นสมการที่ต้องการจะเป็น 3x-2y-z+1=0

CPE 332

Computer Engineering Mathematic II

PART I: Linear Algebra

(Chapter 1-3)

Definition of Matrix

$n \times m$ Matrix $\mathbf{A}$ เราเรียก Matrix $\mathbf{A}$ มี orders $n \times m$ ซึ่งประกอบด้วย Array ของตัวเลข a_{ij} เขียนในรูป

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Row Matrix, Column Matrix

Row Matrix หรือ Row Vector มี 1 Row เช่น $\mathbf{B} = [b_1 \; b_2 \; \cdots \; b_n]$ เป็น Row Vector ขนาด $1 \times n$

Column Matrix หรือ Column vector มี 1 Column เช่น Column Vector ขนาด $n \times 1$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าตัวแปรสำหรับ Matrix เรานิยมใช้ตัว Capital และ Boldface

Basic Operations

<u>Addition&Substraction:</u>

ทำได้สำหรับ Matrix ที่มี order เท่ากัน มีคุณสมบัติเป็น Commutative และ Associative คือ $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ และ

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Matrix Multiplication

Multiplication:

การคูณกันของ Matrix เราเขียน $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$ (**A dot B**) หรือ $\mathbf{AB}$, และถ้า $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ เราได้

$$\mathbf{C}_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

การคูณจะต้องสอดคล้องกับ Inner Rule คือจำนวนของ column ของ $\mathbf{A}$ จะต้องเท่ากับจำนวนของ row ของ $\mathbf{B}$, ถ้า $\mathbf{A}=m\times n, \mathbf{B}=n\times p$ เราจะได้ $\mathbf{C}=m\times p$ Matrix การคูณของ Matrix จะไม่ Commutative $(\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA})$ แต่จะ Associative และDistributive กล่าวคือ $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ และ $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

Square Matrix

Square Matrix/Matrix Power:

ถ้า Matrix มี order $\mathbf{A} = n \times n$ เราเรียก Matrix $\mathbf{A}$ ว่าเป็น square matrix, สังเกตว่ากำลังของ Matrix จะเป็นไปได้สำหรับ Square Matrix เท่านั้น เช่น $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}^2, \mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}^3, \ldots$

Matrix Transpose

Transpose:

Transpose เป็นการแลกเปลี่ยน column และ row ของ Matrix, ถ้า $\mathbf{A} = (a_{nm}) \rightarrow \mathbf{A}^T = (a_{mn})$ ค่าในวงเล็บแสดง Array ของ Elements ของ Matrix หรือเราเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

พึงสังเกตว่า $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\mathbf{T} = \mathbf{A}^\mathbf{T} + \mathbf{B}^\mathbf{T}$, $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{A}^\mathbf{T}$, และ $(\mathbf{A}^\mathbf{T})^\mathbf{T} = \mathbf{A}$

Types of Matrix

<u>Symmetric/Skew-Symmetric:</u>

ถ้า Square Matrix ใดมีคุณสมบัติ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ เราเรียก Matrix นั้นว่าเป็น Symmetric, ในกรณีที่ถ้า $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{A}$ เราเรียก Matrix นั้นว่าเป็น Skew-Symmetric

Real square Matrix(Matrix ที่ประกอบด้วย Elements เป็นค่าจริงทั้งหมด) ใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของ Real Symmetric กับ Real Skew-Symmetric Matrix

Types of Matrix

<u>Complex Conjugate:</u>

Complex Conjugate ของ Matrix $\mathbf{A}$ เขียนเป็น $\mathbf{A}^*$ ซึ่งถ้า $\mathbf{A} = (a_{nm})$ เราได้ $\mathbf{A}^* = (a_{nm}^*)$ เช่นถ้า Element a_{ij} ของ Matrix $\mathbf{A}$ เป็น $x + jy$, เราได้ Element b_{ij} ของ Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ เป็น a_{ij}^* หรือ $x - jy$

Types of Matrix

2.3.3 Hermitian/Skew-Hermitian:

Matrix $\mathbf{A}$ ถ้ามีคุณสมบัติโดยที่ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{*T}$ เราเรียก Matrix $\mathbf{A}$ ว่าเป็น ***Hermitian Matrix***, แต่ถ้าเกิด $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{*T}$ เราจะเรียก Matrix $\mathbf{A}$ ว่าเป็น ***Skew-Hermitian Matrix***

ค่า $\mathbf{A}^{*T}$ เขียนอีกอย่างหนึ่งเป็น $\mathbf{A}^{H}$ และสำหรับ Hermitian Matrix เราได้คุณสมบัติ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{H}$

ในกรณีที่ Matrix มีแต่ค่าจริง ค่า Conjugate ของ Matrix จะไม่เปลี่ยน และ Hermitian Matrix/Skew-Hermitian Matrix จะมีความหมายเดียวกันกับ Symmetric/Skew-Symmetric Matrix

Types of Matrix

Diagonal & Trace:

Square Matrix $\mathbf{A}$ ที่มีแต่ค่า (a_{ij}) , $i = j$ และ Elements อื่นเป็นศูนย์เมื่อ $i \neq j$ เราเรียกว่าเป็น Diagonal Matrix,

$\mathrm{diag}(\mathbf{A})$ หมายถึงเฉพาะ Elements ใน Diagonal ของ $\mathbf{A}$

$\mathrm{trace}(\mathbf{A})$ หมายถึงผลรวมของ Elements ใน Diagonal ของ $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ ไม่จำเป็นต้องเป็น Diagonal Matrix)

Tridiagonal Matrix หมายถึง Square Matrix ที่มี Element อื่นๆเป็นศูนย์ นอกจาก Diagonal Element และ Element ที่อยู่บนและล่างของ Diagonal

Types of Matrix

Identity Matrix:

I เป็น Square Diagonal Matrix ที่มี Elements ใน Diagonal เป็น “หนึ่ง” ทั้งหมด, เราเรียก **I** เป็น Identity Matrix และมักจะใช้เครื่องหมาย “I” แทน สังเกตว่า $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$, และ $\mathbf{I}^{\mathbf{n}} = \mathbf{I}$

Zero or Null Matrix:

0 หรือ Null คือ Matrix ที่ Elements ทุกตัวเป็นศูนย์

Matrix Inverse

Inverse ของ Matrix $\mathbf{A}$ เขียน $\mathbf{A}^{-1}$ มีคุณสมบัติโดยที่ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ และ $\mathbf{A}^{-1}$ จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{A}$ ไม่เป็น Singular หรือ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, คุณสมบัติที่สำคัญ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Orthogonal/Unitary Matrix

ถ้า Matrix $\mathbf{A}$ มีคุณสมบัติที่ $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$ หรือ $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, เราเรียกว่า $\mathbf{A}$ เป็น Orthogonal Matrix, แต่ถ้าเกิด $\mathbf{A}^{*\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$ หรือ $\mathbf{A}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ เราเรียกว่า $\mathbf{A}$ เป็น Unitary Matrix

Orthogonal Vector

Orthogonal Vector:

ถ้า Vector สองตัวคือ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

และ Scalar Product ของ **A** และ **B** ซึ่งเราเขียน

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \text{Scalar Product}$$

ในกรณีที่ **A** และ **B** Orthogonal กัน, เราจะได้

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0,$$

Orthogonal Vector

ในกรณีที่ **A** และ **B** Orthogonal กัน, เราจะได้

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0,$$

ในกรณีของ Complex Vector(ทั้ง **A** และ **B**), ถ้า **A** orthogonal กับ **B** , เราได้ $\mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{B} = 0$,

ถ้า Vector Set $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ มีคุณสมบัติ $\mathbf{X}_j^{*T}\mathbf{X}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$ เราเรียก Set ของ Vector ว่าเป็น Unitary Set, .ในกรณีที่

$\mathbf{X}_i$ มีค่าจริง(real), เราเรียก Set ของ Vector นี้ว่าเป็น Orthonormal set (หรือ Orthogonal set ของ vector)

คำว่า Orthonormal หรือ Unitary จะใช้เมื่อ Magnitude ของ Vector ดังกล่าวมีค่าเท่ากับหนึ่ง

Examples

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \text{is a square matrix of order } 3\times 3, \mathbf{A} \text{ is also a symmetric matrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{is a square matrix of order } 3\times 3, \mathbf{B} \text{ is also a skew - symmetric matrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{is a diagonal matrix, Diag}(\mathbf{C}) = \{1, 2, 3\}, \text{ trace}(\mathbf{C}) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$\mathbf{C}$ is also a symmetric matrix.

Examples

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{is an upper diagonal matrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{is a lower diagonal matrix}$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Examples

For any matrix $\mathbf{A}$ we have $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ is a symmetric matrix, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ is also a symmetric matrix.

proof : From $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ we have $(\mathbf{AA}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{is a zero matrix of order } 3\times 3$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{is a zero row vector and } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{is a zero column vector}$$

Examples

$$\mathbf{K} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ can be written in matrix form as } \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ can be written in matrix form as } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \bullet \mathbf{L} = \mathbf{K}^T\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4(-1) = 0$$

in this case vector **K** and vector **L** are orthogonal(perpendicular.)

Examples

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

we have $\mathbf{MN}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

We can say that $\mathbf{M}=\mathbf{N}^{-1}$ and $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}$ since $\mathbf{MN}=\mathbf{I}$.

If matrix is diagonal, the inverse is just the matrix with reciprocal of diagonal elements and is also diagonal.

For example, $\mathbf{O}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ then $\mathbf{O}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

Examples

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ is an orthogonal matrix since

$$\mathrm{P}^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$ we can see that

$$\mathrm{PP}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & c\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ for any angle θ

Determinant

ค่า ***Determinant*** ของ Matrix สามารถให้นิยามได้หลายแบบ ในกรณีนี้ เราจะใช้ Recursive Definition ดังนี้

ค่า Determinant ของ Matrix a ขนาด 1×1 ให้นิยามว่ามีค่าเท่ากับค่า Scalar a และ Determinant ของ Matrix $\mathbf{A}$ ขนาด $n\times n$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(\mathbf{A}_{1,j})$$

โดยที่ $\mathbf{A}_{1,j}$ เป็น Matrix ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ ได้จากกรลบแถวที่หนึ่ง และ Column ที่ j ของ Matrix $\mathbf{A}$ ออก ซึ่งค่า Determinant ที่ได้ เราเรียก *Minor* ของ Element $a_{1,j}$ ใน Matrix $\mathbf{A}$

Determinant of Matrix

- Given square matrix, determinant of a matrix **A** written **|A|** is defined by recursive equation as

$$\det(\mathbf{A}) = \left|\mathbf{A}\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

  - Starting from [$\mathbf{a}_{1x1}$] = a, and det(**a**)=a

Sign Matrix

- Given matrix **A** of order nxn
  - Sign matrix of A is the matrix in the form $\mathbf{B}=[b_{ij}]=[(-1)^{(i+j)}]$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{sign } \mathbf{A}=\begin{bmatrix} (-1)^2 & (-1)^3 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ (-1)^3 & (-1)^4 & \cdots & (-1)^{n+2} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \cdots & (-1)^{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Minor a_{ij}

- Is the determinant of matrix **A** after taken out row i^th^ and j^th^ column.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & 6 & -7 \\ 4 & 5 & -6 & 7 & 8 \\ -5 & 6 & 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$Minor(a_{23}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 6 & -7 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ -5 & 6 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

Cofactor a_{ij}

- Cofactor a_{ij} is the minor a_{ij} with the sign according to sign pattern
- Matrix of cofactor of **A** is the matrix **B** which each element b_{ij} is the cofactor a_{ij}

$$Ex.\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, Co(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Determinant of 2x2 and 3x3

Determinants: $|\mathbf{A}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \text{Minor of } a_{11} - a_{12} \cdot \text{Minor of } a_{12} + a_{13} \cdot \text{Minor of } a_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Calculation of Determinant using Recursive Expansion

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

$$|a| = a, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ j & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ i & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ i & j \end{vmatrix}$$

$$= a(ek - jf) - b(dk - if) + c(dj - ie)$$

$$= aek\text{-}afi - bdk + bfi + cdj - cei, \quad \text{first row expand}$$

$$= -b\begin{vmatrix} d & f \\ i & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$= -b(dk - if) + e(ak - ic) - j(af - dc)$$

$$= -bdk + bfi + aek - cei - afj + cdj, \text{ second column expand}$$

Calculation of Determinant using Recursive Expansion

$$\det(\mathbf{A}) = \left|\mathbf{A}\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

Complexity = O(n!)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

ความหมายของ Determinant

ค่า Determinant ของ Matrix จะบ่งบอกว่า Matrix นั้นเป็น ***Singular*** หรือไม่ โดยที่ Matrix จะเป็น Singular ก็ต่อเมื่อค่า Determinant มีค่าเท่ากับศูนย์

Determinant ของ Matrix $\mathbf{A}$ เราใช้เครื่องหมาย $\det(\mathbf{A})$ หรือ $|\mathbf{A}|$ เครื่องหมายในกรณีหลังระวังอย่าสับสนกับค่า Magnitude ของ Vector หรือ Scalar

- เป็นค่า Scalar ที่สำคัญที่สุดที่บ่งบอกคุณสมบัติของ Square Matrix

คุณสมบัติของ Determinant

1. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
2. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
3. $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$
4. $\det(\mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A})^*$
5. $\det(\mathbf{I}) = 1$

คุณสมบัติของ Determinant

6. ถ้ามีการสลับ Row หรือ Column ค่า Determinant ใหม่จะเท่ากับ -1 คูณค่าเดิม

7. ถ้า Matrix $\mathbf{A}$ เป็น Singular หรือ ***Linearly Dependent*** เราจะได้ $|\mathbf{A}| = 0$ อันนี้สามารถนำมาใช้ทดสอบ Non-Singular Matrix ได้

8. ถ้าแถวใดหรือ Column ใดของ Matrix เท่ากับศูนย์ หรือมีสองแถวหรือสอง Column ที่เหมือนกัน หรือเป็นจำนวนเท่าของกัน ค่า Determinant จะเป็นศูนย์

9. ถ้าเราคูณค่าคงที่ให้กับแถวใด หรือ Column ใดของ Matrix ค่า Determinant ที่ได้จะเป็นจำนวนเท่าของค่าคงที่นั้นกับค่า Determinant เดิม

10. ถ้าเราสร้าง Matrix ใหม่ ได้จากการนำค่าคงที่คูณด้วยแถว หรือ Column หนึ่งใดทำการบวกลบกับแถว หรือ Column ที่เหลือ ค่า Determinant ของ Matrix ใหม่จะยังคงเท่ากับ Matrix เดิม

Calculation of Determinant (Algorithm)

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

Complexity = O(n!)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ถ้าเราบวกลบ Column เพื่อให้ Element ในแถว(หรือคอลัมน์) ที่ต้องการขยายเป็นศูนย์หมดยกเว้น Element เดียว เราจะลงเอยด้วยการคำนวณหา Determinant ของ Matrix ที่มีขนาดลดลงหนึ่ง

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

การบวกลบดังกล่าวต้องมีหลักการ มิฉะนั้นผลลัพธ์จะไม่ถูกต้อง เราจะใช้คุณสมบัติข้อ 9 และ 10 ของ Determinant เพื่อกระทำดังกล่าว

Algorithm การหา Determinant ที่มีประสิทธิภาพ

- ใช้คุณสมบัติข้อ 10 ร่วมกับข้อ 9 เพื่อสร้างเป็น Algorithm
  - 1. มองหา Element ใน Matrix ที่มีค่าเท่ากับ 1 ถ้าหาไม่ได้ เลือก Element ใดก็ได้ จากนั้นหารทั้งแถว หรือหารทั้ง Column ด้วยค่าของ Element นั้นเพื่อทำให้ค่าเป็น 1 ตัวเลขที่มาหารนั้นจะต้องกลับนำมาคูณกับคำตอบที่ได้ เป็นค่า Determinant ที่ต้องการ (คุณสมบัติข้อ 9)
  - 2. พิจารณาว่าจะ Expand แบบแถวหรือ Column ผ่าน Element ที่เลือก จากนั้นกำจัด Element อื่นในแนวที่ Expand เป็นศูนย์ให้หมด(คุณสมบัติข้อ 10) สมมุติเราเลือก Element a(x,y)
    - ถ้าจะ Expand แบบแถว ให้บวกลบ Column อื่นกับ Column ที่ผ่าน Element ที่เลือก เพื่อให้ Element ในแถวที่จะ Expand เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้น Element ที่เลือก
      - Col(j) ใหม่ = Col(j) เก่า – a(x,j)*Col(y); j = 1,2,..,n ยกเว้น y
    - ถ้าจะ Expand แบบ Column ให้บวกลบแถวอื่นกับแถวที่ผ่าน Element ที่เลือก เพื่อให้ Element ใน Column ที่จะ Expand เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้น Element ที่เลือก
      - Row(i) ใหม่ = Row(i) เก่า – a(i,y)*Row(x); i = 1,2,..,n ยกเว้น x

Algorithm การหา Determinant ที่มีประสิทธิภาพ(ต่อ)

– 3.ทำการ Expand ตามสูตร เราจะลงเอยด้วยการหา Determinant ของ Matrix ที่มีขนาดลดลงหนึ่งเพียงครั้งเดียว

– 4. วิธีนี้สามารถทำเป็น Recursive เพื่อลดการหา Determinant ของ Matrix ขนาดใหญ่เหลือแค่การหา Determinant ของ Matrix 2x2 หรือ 3x3

การหา Determinant

Example 2.1 จงหา Determinant ของ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

คำตอบ เราจะใช้คุณสมบัติข้อ 10 ที่กล่าวข้างต้น เปลี่ยน Matrix แถวที่ 1, 3 และ 4 ให้มีค่าใน Column ที่ 3 เป็น ศูนย์ จากนั้นหาค่า Determinant ตาม Column ที่ 3 ซึ่งการคำนวณจะลดลงเหลือการหาค่า Determinant ของ Matrix ขนาด 3×3 เท่านั้น

เราสร้าง Matrix $\mathbf{B}$ จาก Matrix $\mathbf{A}$ โดย

สร้างแถวที่หนึ่งใหม่จากการนำ -2 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

สร้างแถวที่สามใหม่จากการนำ -3 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

สร้างแถวที่สี่ใหม่จากการนำ 4 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

ค่า Determinant ของ Matrix ใหม่จะเท่ากับ Matrix เดิม แต่จะคำนวณน้อยกว่าเดิมมากถ้าเรา Expand ตาม Column ที่ 3 ดังนี้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 20 & -7 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -1\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -17 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} = 34$$

สังเกตว่า ในการหา Determinant ของ Matrix 3×3 ในบรรทัดที่สอง เราใช้วิธีการเดิมในการลดรูป และทำการ Expand ในแถวที่สอง

กรรมวิธีดังกล่าวสามารถทำได้ถ้าใน Matrix มี Element ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ถ้าไม่มี Element ใดเท่ากับหนึ่ง เราสามารถแยก Factor แถวใดแถวหนึ่ง หรือ Column หนึ่งออกมา เพื่อให้ Element หนึ่งมีค่าเป็นหนึ่ง และใช้วิธีการดังกล่าว แต่อย่าลืมคูณค่า Factor ที่แยกออกในผลลัพธ์ที่ได้ (ดูคุณสมบัติข้อ 9)

การหา Determinant

กรรมวิธีดังกล่าวสามารถทำได้ถ้าใน Matrix มี Element ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ถ้าไม่มี Element ใดเท่ากับหนึ่ง เราสามารถแยก Factor แถวใดแถวหนึ่ง หรือ Column หนึ่งออกมา เพื่อให้ Element หนึ่งมีค่าเป็นหนึ่ง และใช้วิธีการดังกล่าว แต่อย่าลืมคูณค่า Factor ที่แยกออกในผลลัพธ์ที่ได้ (ดูคุณสมบัติข้อ 9)

ถ้า Matrix เป็น Diagonal Matrix หรือ ***Upper Triangular*** หรือ ***Lower Triangular*** (คือ มีค่า Element ครึ่งล่างต่ำกว่า Diagonal หรือครึ่งบนสูงกว่า Diagonal เป็นศูนย์หมด ตามลำดับ) ค่า Determinant สามารถคำนวณได้ง่าย จะเท่ากับผลคูณของ Element ใน Diagonal

Inverse of Matrix

2.5 Matrix Inverse

2.5.1 Matrix Inverse:

กำหนด Matrix **A** ที่ไม่ใช่ Singular Matrix เราต้องการหา Matrix **B** ที่ทำให้ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ดังนั้น Matrix **B** ที่ได้คือ ***Inverse Matrix*** ของ **A** กล่าวคือ $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

ถ้า Matrix เป็น Singular จะไม่มี Inverse ดังนั้น Inverse จะมีได้สำหรับ Non-Singular Matrix เท่านั้น และ Inverse ของ Matrix จะ Unique

Inverse of Matrix

สามารถกระทำได้หลายวิธี ได้แก่

- ใช้วิธีทาง Numerical Method เช่นโดยใช้ Gauss-Jordan Elimination(จะเรียนในภายหลัง)
- Formal Evaluation ซึ่งจะกล่าวในบทนี้

ขั้นตอนการหา Matrix Inverse กระทำดังนี้

1. หา Cofactor ของ Matrix $\mathbf{A}$ โดยแทนค่าทุกๆ element ด้วยค่า Cofactor ของมัน ขั้นตอนนี้จะใช้การคำนวณมากที่สุด เพราะต้องหา Cofactor ของทุกๆ Element

2. Transpose Matrix ที่ได้ในข้อ 1 เราได้ Matrix ใหม่เรียก ***Adjoint*** ของ Matrix $\mathbf{A}$ หรือ $\mathbf{adj\ A}$

3. หาค่า Determinant ของ $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|$

4. คำนวณ Inverse ของ Matrix โดย $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{adj\ A}}{|\mathbf{A}|}$

Inverse of Matrix

Example 2.2 จงหา Inverse ของ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

คำตอบ เราหา Matrix ของ Cofactor ดังนี้

$$\text{Cofactor} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \\ 9 & 7 & -17 \end{bmatrix}$$

Inverse of Matrix

$$\text{Cofactor} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \\ 9 & 7 & -17 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราได้ $adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$

ทำการหา Determinant ของ Matrix เราได้

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 17 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น เราได้ $adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$

ทำการหา Determinant ของ Matrix เราได้

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 17 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

ขอให้นักศึกษาลองตรวจสอบว่า $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrix Inverse

- การคำนวณตามสมการที่กล่าวมา จะใช้การคำนวณมากเกินไป
- หลัง Midterm เราจะมาดู Algorithm ที่มีประสิทธิภาพ เพื่อใช้ในการหา Matrix Inverse
  - Gauss-Jordan Method

Matrix Norms

2.6 Matrix Norms

สำหรับ Matrix $\mathbf{A}$ ใน $\mathbf{C}^{n\times m}$ เราให้นิยาม ***Norm*** ของ Matrix ดังนี้

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_{pq} = \max_{x\in\mathbf{C}^m, x\neq 0} \frac{\left\|\mathbf{A}x\right\|_p}{\left\|x\right\|_q}$$

ในการนี้ Norm $\left\|\cdot\right\|_{pq}$ ได้มาจากสอง Norm คือ $\left\|\cdot\right\|_p$ และ $\left\|\cdot\right\|_q$ ซึ่งมีคุณสมบัติขิง Norm ทั้งสามประการ กล่าวคือ

1. $\left\|\mathbf{A}\right\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ และ $\left\|\mathbf{A}\right\| = 0 \quad \mathit{iff} \;\; \mathbf{A} = 0$

2. $\left\|\alpha\mathbf{A}\right\| = \left|\alpha\right|\left\|\mathbf{A}\right\|, \forall \mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times m}, \forall \alpha\in\mathbf{C}$

3. $\left\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\right\| \leq \left\|\mathbf{A}\right\| + \left\|\mathbf{B}\right\|, \forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{C}^{n\times m}$

คุณสมบัติที่สำคัญอีกอันของ Norm ก็คือ $\left\|\mathbf{AB}\right\|_p \leq \left\|\mathbf{A}\right\|_p\left\|\mathbf{B}\right\|_p$

Norm ของ Matrix ที่สำคัญมีดังนี้

Norms

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left[\rho(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\right]^{1/2} = \left[\rho(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\right]^{1/2}$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left[trace(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\right]^{1/2} = \left[trace(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\right]^{1/2}$$

ค่า $\rho(\mathbf{X})$ หมายถึงค่า Magnitude ที่มากที่สุดของค่า Eigenvalue ของ $\mathbf{X}$ (Eigenvalue จะกล่าวในบทหน้า)

เรียก Spectral Radius ของ X

Homework 1:Vector

- Download HW 1 Question Sheet จาก Website
  - พิมพ์ Question Sheet ลงบนกระดาษ A4
  - ทำการบ้าน โดยแสดงวิธีทำและคำตอบในช่องที่กำหนด ด้วยลายมือนักศึกษา ห้ามพิมพ์ ต้องใช้กระดาษที่พิมพ์นี้ทำการบ้าน
  - เขียนชื่อที่หัวกระดาษ ส่งอาทิตย์หน้าต้นชั่วโมง
  - ไม่รับงานที่ไม่เป็นไปตามที่กำหนด